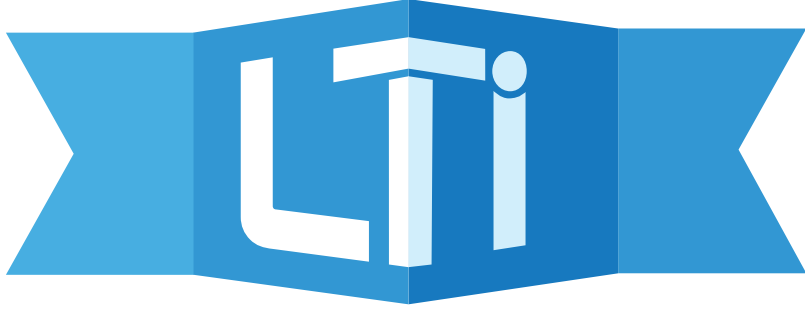




LİMİT TÜREV İNTEGRAL

Doğın KAYA

EVRENSEL
İLETİŞİM
YAYINLARI

LİMİT TÜREV İNTEGRAL



EVRENSEL İLETİŞİM YAYINLARI

Zübeyde Hanım Mah. 655. Cad. No: 15/A
Altındağ / ANKARA

Tel: (0312) 384 65 00 Faks: (0312) 384 61 00

email: evrensel@evrenseliletisim.com.tr

www.evrenseliletisim.com.tr

Copyright ©

Evrensel İletişim Yayın Dağıtım
San. Tic. Ltd. Şti.

Bu kitabın her hakkı

EVRENSEL İLETİŞİM LTD. ŞTİ.'e aittir.

Hangi amaçla olursa olsun, bu kitabın tamamının ya da bir kısmının, kitabı yayınlayan yayınevinin önceden izni olmaksızın elektronik, mekanik, fotokopi ya da herhangi bir kayıt sistemi ile çoğaltılması, yayınlanması ve depolanması yasaktır.

Yazar

Doğan KAYA

Genel Yayın Yönetmeni

Engin KARAPINAR

Dizgi - Tasarım - Kapak

Osman GÜRLEYİK

Basım Yeri

Korza Basım

ISBN: 978 - 605 - 7958 - 28 - 0

**EVRENSEL
İLETİŞİM
YAYINLARI**



İSTİKLÂL MARŞI

Korkma, sönmez bu şafaklarda yüzen al sancak;
Sönmeden yurdumun üstünde tüten en son ocak.
O benim milletimin yıldızıdır, parlayacak;
O benimdir, o benim milletimindir ancak.

Çatma, kurban olayım, çehreni ey nazlı hilâl!
Kahraman ırkıma bir gül! Ne bu şiddet, bu celâl?
Sana olmaz dökülen kanlarımız sonra helâl.
Hakkıdır Hakk'a tapan milletimin istiklâl.

Ben ezelden beridir hür yaşadım, hür yaşarım.
Hangi çılgın bana zincir vuracakmış? Şaşarım!
Kükremiş sel gibiyim, bendimi çiğner, aşarım.
Yırtarım dağları, enginlere sığmam, taşarım.

Garbın âfâkını sarmışsa çelik zırhlı duvar,
Benim iman dolu göğsüm gibi serhaddim var.
Ulusun, korkma! Nasıl böyle bir imanı boğar,
Medeniyet dediğin tek dişi kalmış canavar?

Arkadaş, yurduma alçakları uğratma sakın;
Siper et gövdeni, dursun bu hayâsızca akın.
Doğacaktır sana va'dettiği günler Hakk'ın;
Kim bilir, belki yarın, belki yarından da yakın

Bastığın yerleri toprak diyerek geçme, tanı:
Düşün altındaki binlerce kefensiz yatanı.
Sen şehit oğlusun, incitme, yazıktır, atanı:
Verme, dünyaları alsan da bu cennet vatanı.

Kim bu cennet vatanın uğruna olmaz ki feda?
Şüheda fışkıracak toprağı sıksan, şüheda!
Cânı, cânânı, bütün varımı alsın da Huda,
Etmesin tek vatanımdan beni dünyada cüda.

Ruhumun senden İlâhî, şudur ancak emeli:
Değmesin mabedimin göğsüne nâmahrem eli.
Bu ezanlar -ki şehadetleri dinin temeli-
Ebedî yurdumun üstünde benim inlemeli.

O zaman vecd ile bin secde eder -varsa- taşım,
Her cerâhamdan ilâhî, boşanıp kanlı yaşım,
Fışkırır ruh-ı mücerret gibi yerden na'sım;
O zaman yükselerek arşa değer belki başım.

Dalgalar sen de şafaklar gibi ey şanlı hilâl!
Olsun artık dökülen kanlarımın hepsi helâl.
Ebediyyen sana yok, ırkıma yok izmihlâl;
Hakkıdır hür yaşamış bayrağımın hürriyet;
Hakkıdır Hakk'a tapan milletimin istiklâl!

Mehmet Âkif Ersoy



Ey Türk gençliği! Birinci vazifen, Türk istiklâlini, Türk Cumhuriyetini, ilelebet muhafaza ve müdafaa etmektir.

Mevcudiyetinin ve istikbalinin yegâne temeli budur. Bu temel, senin en kıymetli hazinendir. İstikbalde dahi, seni bu hazineden mahrum etmek isteyen dâhilî ve hâricî bedhahların olacaktır. Bir gün, istiklâl ve cumhuriyeti müdafaa mecburiyetine düşersen, vazifeye atılmak için, içinde bulunacağın vaziyetin imkân ve şeraitini düşünmeyeceksin! Bu imkân ve şerait, çok namûsait bir mahiyette tezahür edebilir. İstiklâl ve cumhuriyetine kastedecek düşmanlar, bütün dünyada emsali görülmemiş bir galibiyetin mümessili olabilirler. Cebren ve hile ile aziz vatanın bütün kaleleri zapt edilmiş, bütün tersanelerine girilmiş, bütün orduları dağıtılmış ve memleketin her köşesi bilfiil işgal edilmiş olabilir. Bütün bu şeraitten daha elîm ve daha vahim olmak üzere, memleketin dâhilinde iktidara sahip olanlar gaflet ve dalâlet ve hattâ hıyanet içinde bulunabilirler. Hattâ bu iktidar sahipleri şahsî menfaatlerini, müstevlîlerin siyasî emelleriyle tevhit edebilirler. Millet, fakr u zaruret içinde harap ve bîtap düşmüş olabilir.

Ey Türk istikbalinin evlâdı! İşte, bu ahval ve şerait içinde dahi vazifen, Türk istiklâl ve cumhuriyetini kurtarmaktır. Muhtaç olduğun kudret, damarlarındaki asil kanda mevcuttur.

Mustafa Kemal Atatürk

Ön Söz

Sevgili Öğrenciler,

Teknolojik gelişmelerle birlikte daha önceki kuşakların karşılaşmadığı yeni problemlerle karşılaşılan günümüz dünyasında matematiksel düşünme gücü gelişmiş bireyler yetiştirilmesi amacı ile yeni matematik programlarına ihtiyaç duyulmaktadır. Bu programlarla öğrencilerin, matematiksel düşünme becerisi kazanmaları, problem çözme yeteneklerinin geliştirilmesi ve matematiğin aralarında anlamlı ilişkiler bulunan kendine özgü sembolleri ve terminolojisini kavramaları hedeflenmektedir. Bu amaca ulaşmak için, öncelikle bireyin matematik öğrenmeye istekli olması, matematiğin kazandıracaklarının farkında olması, matematiğin eğlenceli yanını görebilmesi, matematiğin kişinin yaratıcılığını geliştirdiğine inanması ve her şeyden de önemlisi matematiğin öğrenilebileceğini kabullenmesi gerekmektedir.

Bu amaçlara hizmetle hazırlamış olduğum **MATEMATİK FASİKÜLLERİ**'nin öğrencilerimizin matematiği sevmelerini, matematiğe hâkim olmak için gerekli öz güvene ulaşmalarını ve mantıksal karar vermek için analitik düşünme gücünün oluşmasını sağlayacağını umuyorum.

Tüm öğrencilerimize hayatlarında başarılar diliyorum...

Doğan KAYA

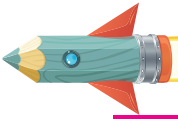
LİMİT VE SÜREKLİLİK	9
Bir Sayıya Sağdan ve Soldan Yaklaşmak - 1	10
Bir Sayıya Sağdan ve Soldan Yaklaşmak - 2	12
Fonksiyonun Uç Noktalarında Limit.....	14
Limit Özellikleri - 1	16
Limit Özellikleri - 2	18
Parçalı Fonksiyonun Limiti.....	20
Mutlak Değer Fonksiyonunun Limiti - 1	22
Mutlak Değer Fonksiyonunun Limiti - 2	24
Trigonometrik Fonksiyonların Limiti - 1	26
Trigonometrik Fonksiyonların Limiti - 2.....	28
$\frac{0}{0}$ Belirsizliği - 1	30
$\frac{0}{0}$ Belirsizliği - 2	32
$\frac{0}{0}$ Belirsizliği - 3	34
Süreklilik	36
Sürekliliğin Grafik Yorumu	38
Süreklilik Özellikleri - 1	40
Süreklilik Özellikleri - 2	42
ÖSYM Tarzı Çözümlü Sorular	44
PEKİŞTİRME TESTLERİ [1 – 18].....	46
TÜREV	73
Anlık Değişim Oranı	74
Türevin Tanımı.....	76

Türev Alma Kuralları	78
Türev ve Süreklilik İlişkisi.....	80
Sol - Sağ Limit ve Sol - Sağ Türev - 1.....	82
Sol - Sağ Limit ve Sol - Sağ Türev - 2.....	84
İki Fonksiyonun Çarpımının Türevi ve $[f(x)]^n$ Fonksiyonunun Türevi	86
İki Fonksiyonun Bölümünün Türevi ve Rasyonel Fonksiyonların Türevi.....	88
Köklü İfadelerin Türevi	90
Parçalı Fonksiyonların Türevi.....	92
Mutlak Değer Fonksiyonunun Türevi	94
Bileşke Fonksiyonun Türevi	96
Zincir Kuralı.....	98
Teğet Denklemi	100
Normal Denklemi	102
Türevin Geometrik Anlamı	104
Artan - Azalan Fonksiyonlar - 1	106
Artan - Azalan Fonksiyonlar - 2	108
Ekstremum Noktaları - 1.....	110
Mutlak Ekstremum Noktalar	112
Ekstremum Noktaları - 2.....	114
Bir Eğrinin Grafiğinin Çizilmesi.....	116
Maksimum - Minimum Problemleri - 1	118
Maksimum - Minimum Problemleri - 2	120
Maksimum - Minimum Problemleri - 3	122
Maksimum - Minimum Problemleri - 4 (Çözümü).....	124
Maksimum - Minimum Problemler - 5	126
Yol ve Hız Fonksiyonunun Türevi.....	128
PEKİŞTİRME TESTLERİ.....	130
İNTEGRAL	160
Diferansiyel Kavramı	162

İntegral Alma Kuralları	164
Belirsiz İntegralin Özellikleri	166
İntegralde Değişken Değiştirem Kuralı	168
Belirli İntegral	170
Parçalı Fonksiyonun İntegrali	172
Mutlak Değer Fonksiyonun İntegrali	174
İntegral Türev İlişkisi - 1	176
İntegral Türev İlişkisi - 2	178
İntegral Türev İlişkisi - 3	180
Riemann (Riman) Toplamı - 1	182
Riemann (Riman) Toplamı - 2	184
İntegralle Alan Hesabı - 1	186
İntegralle Alan Hesabı - 2	188
İntegralle Alan Hesabı - 3	190
İntegralle Alan Hesabı - 4	192
İntegralle Alan Hesabı - 5	194
İntegralle Alan Hesabı - 6	196
Çözümlü Örnekler	198
İntegralin Fiziksel Uygulaması	200
ÖSYM Tarzı Çözümlü Çözümlü Sorular - 1	202
ÖSYM Tarzı Çözümlü Çözümlü Sorular - 2	204
ÖSYM Tarzı Çözümlü Çözümlü Sorular - 3	206
ÖSYM Tarzı Çözümlü Çözümlü Sorular - 4	208
ÖSYM Tarzı Çözümlü Çözümlü Sorular - 5	210
PEKİŞTİRME TESTLERİ	212

LİMİT

1. BİR SAYIYA SAĞDAN VE SOLDAN YAKLAŞMAK
2. BİR FONKSİYONUN UÇ NOKTALARINDA LİMİT
3. LİMİT ÖZELLİKLERİ
4. PARÇALI FONKSİYONUN LİMİTİ
5. MUTLAK DEĞER FONKSİYONUNUN LİMİTİ
6. TRİGONOMETRİK FONKSİYONLARIN LİMİTİ
7. $\frac{0}{0}$ BELİRSİZLİĞİ
8. SÜREKLİLİK VE ÖZELLİKLERİ

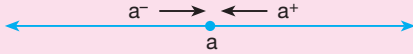


BİR SAYIYA SAĞDAN VE SOLDAN YAKLAŞMAK - 1

Bir değişkenin bir sayıya yaklaşması aşağıdaki tablo incelendiğinde,

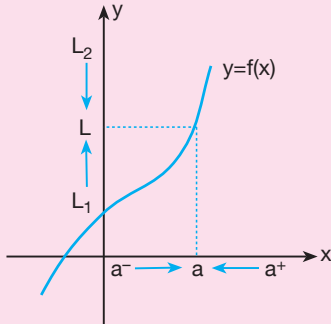
...	3,5	3,9	3,99	3,9999	3,999	4	4,0001	4,001	4,01	4,1	4,5	...
					4^-	4^+						

soldan sağa doğru gidildikçe x değerlerinin artan değerler alarak 4 sayısına yaklaştığı söylenebilir. Bu durum x 'in 4^- 'e soldan yaklaşması olarak ifade edilir ve $x \rightarrow 4^-$ ile gösterilir. Sağdan sola doğru gidildikçe x değerlerinin azalan değerler alarak 4 sayısına yaklaştığı söylenebilir. Bu durum x 'in 4^+ 'e sağdan yaklaşması olarak ifade edilir ve $x \rightarrow 4^+$ ile gösterilir.



x değişkeni bir a sayısından büyük ve a 'ya yakın değerler alıyorsa x , a 'ya sağdan yaklaşıyor denir ve $x \rightarrow a^+$ şeklinde gösterilir.

x değişkeni bir a sayısından küçük ve a 'ya yakın değerler alıyorsa x , a 'ya soldan yaklaşıyor denir ve $x \rightarrow a^-$ şeklinde gösterilir.



⚠ x değişkeni a sayısına soldan yaklaştığında $f(x)$ de bir L_1 reel sayısına yaklaşıyorsa; L_1 sayısına f fonksiyonunun $x = a$ noktasındaki soldan limiti denir ve

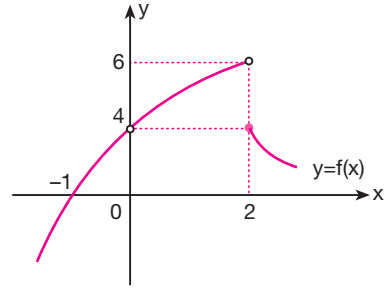
$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L_1 \text{ şeklinde gösterilir.}$$

⚠ x değişkeni a sayısına sağdan yaklaştığında $f(x)$ de bir L_2 reel sayısına yaklaşıyorsa; L_2 sayısına f fonksiyonunun $x = a$ noktasındaki sağdan limiti denir ve

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L_2 \text{ şeklinde gösterilir.}$$

⚠ f fonksiyonunun $x = a$ noktasında limitinin var olması için gerek ve yeter şart bu noktadaki sağdan ve soldan limitlerin mevcut ve birbirine eşit olmasıdır. Buna göre, $L_1 = L_2$ ise, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ şeklinde gösterilir.

KAVRAMA ÖRNEĞİ



Şekilde f fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre;

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$$

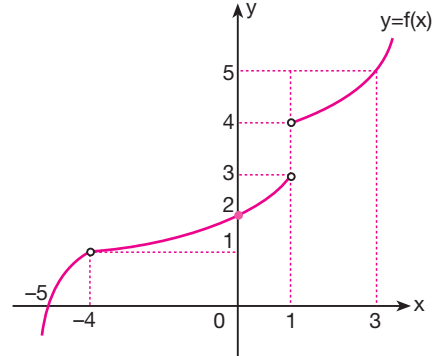
toplamı kaçtır?

Çözüm:

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 4, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 4$$

O hâlde $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 + 4 + 4 = 8$ bulunur.

KAVRAMA ÖRNEĞİ



Şekildeki grafik f fonksiyonuna aittir.

Buna göre, $-5, -4, 0, 1, 3$ değerleri için var olan limitler toplamı kaçtır?

Çözüm:

$$\lim_{x \rightarrow -5^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -5^-} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -4^-} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 4, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 3$$

$3 \neq 4$ olduğu için $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \text{YOKTUR}$

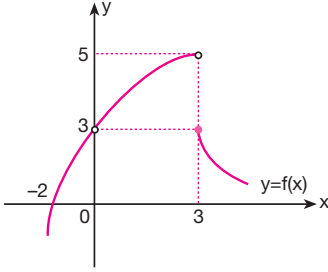
$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 5$$

O hâlde limitler toplamı $0 + 1 + 2 + 5 = 8$ olur.

KAVRAMA TESTİ

1

1.



Şekilde f fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

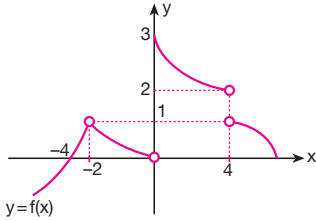
Buna göre;

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$$

toplamı kaçtır?

- A) 0 B) 2 C) 4 D) 6 E) 8

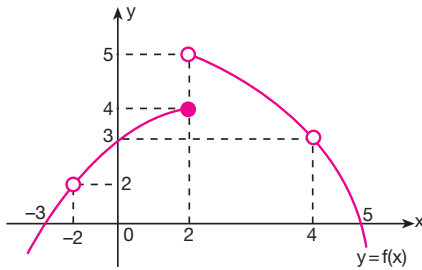
2.



Yukarıda grafiği verilen f fonksiyonu için aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

- A) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 1$ B) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$
 C) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ D) $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = 2$
 E) $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = 1$

3.

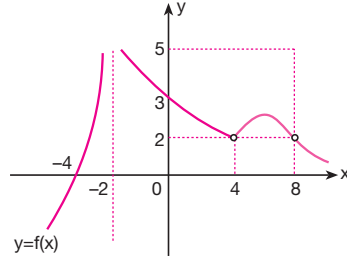


Şekilde f fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre, aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

- A) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 2$ B) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 3$
 C) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$ D) $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 3$
 E) $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 0$

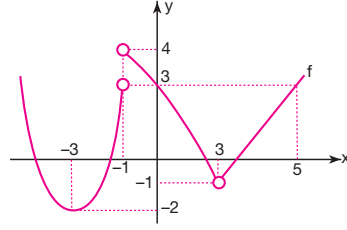
4.



Yukarıda grafiği verilen f fonksiyonu için aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

- A) $\lim_{x \rightarrow (-4)^+} f(x) = 0$ B) $\lim_{x \rightarrow 8^+} f(x) = 2$
 C) $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = 0$ D) $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 2$
 E) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 3$

5.



Şekilde f fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

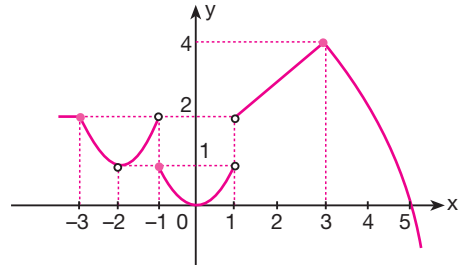
Buna göre

$$\lim_{x \rightarrow -3} f(x) + \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0} f(x) + \lim_{x \rightarrow 3} f(x)$$

toplamının değeri kaçtır?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

6.



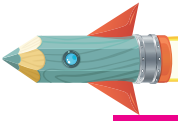
Şekildeki grafik f fonksiyonuna ait olduğuna göre,

$$\lim_{x \rightarrow (-3)^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 5} f(x)$$

toplamının değeri kaçtır?

- A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 5

1	2	3	4	5	6
E	C	C	C	D	B

BİR SAYIYA SAĞDAN VE SOLDAN
YAKLAŞMAK - 2

$f(x)$ fonksiyonu $x = a$ komşuluğunda tanımlı olsun.

⚠ $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$ ise

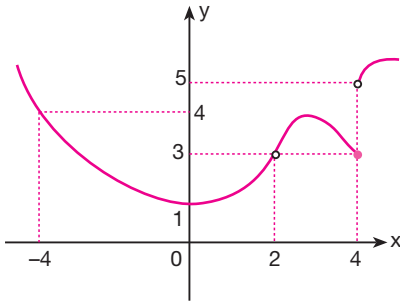
$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ dir. (Sağ ve sol limitler eşit ise limit vardır.)

⚠ $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ ise

fonksiyonunun $x = a$ 'da limiti yoktur.

⚠ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ varsa tektir.

KAVRAMA ÖRNEĞİ



Şekilde f fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Fonksiyonun $-4, 0, 2, 4$ apsisli noktalar için var olan limitler toplamı kaçtır?

Çözüm:

⚠ $x = 2$ ve $x = 4$ kritik noktalar

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 3 \end{array} \right\} \text{ o hâlde } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$$

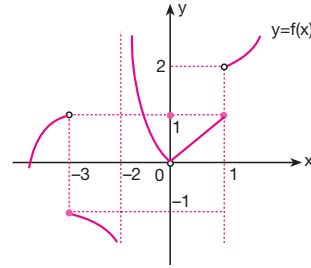
$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = 5 \\ \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = 3 \end{array} \right\} 5 \neq 3 \text{ o hâlde } \lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \text{YOKTUR}$$

⚠ $\lim_{x \rightarrow -4} f(x) = f(-4) = 4$

⚠ $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 1$

Var olan limitler toplamı: $4 + 1 + 3 = 8$

KAVRAMA ÖRNEĞİ



Şekilde f fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre $-3, -2, 0, 1$ noktalarının kaç tanesinde limit vardır?

Çözüm:

⚠ $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = -1$

⚠ $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = 1$

$-1 \neq 1$ o hâlde $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \text{YOKTUR}$

⚠ $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty$

⚠ $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \infty$

o hâlde $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \text{YOKTUR}$

⚠ $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ vardır.

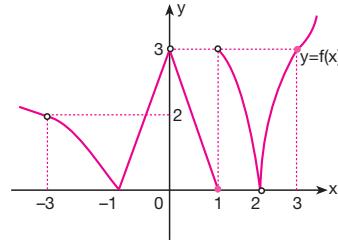
⚠ $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2$

⚠ $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$

$2 \neq 1$ o hâlde $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \text{YOKTUR}$

Buna göre yalnız bir noktada ($x = 0$) limit vardır.

KAVRAMA ÖRNEĞİ



Şekilde verilen f fonksiyonunun grafiğine göre aşağıdakilerden kaç tanesi yanlıştır?

- I. $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = 3$ II. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0$ III. $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0$
- IV. $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = 2$ V. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$

Çözüm:

I. $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = 3$ (doğru) II. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0$ (doğru)

III. $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0$ (doğru) IV. $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = 2$ (doğru)

V. $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3$

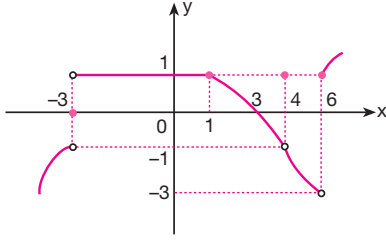
$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0$

$3 \neq 0$ o hâlde $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \text{YOKTUR}$ (yanlış)

O hâlde 1 tanesi yanlıştır.

KAVRAMA TESTİ

1.

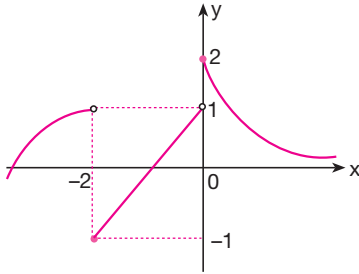


Şekildeki grafik $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, f fonksiyonuna aittir.

Buna göre, aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

- A) $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 0$ B) $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = -1$
 C) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 0$ D) $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = -1$
 E) $\lim_{x \rightarrow 6^+} f(x) = -3$

2.

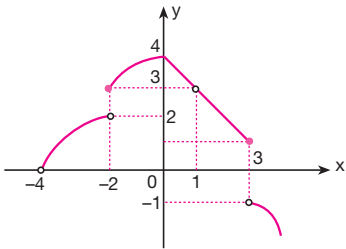


Yukarıda f fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre, aşağıdaki ifadelerden hangileri yanlıştır?

- I. $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = f(2)$
 II. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$
 III. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$
 IV. $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)$ yoktur.
 A) I ve III B) I ve IV C) II ve IV
 D) I, II ve IV E) I, II ve III

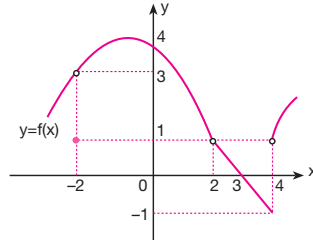
3.



Şekilde grafiği verilen f fonksiyonunda $-2, 0, 1$ ve 3 apsisi noktalar için var olan limitler toplamı kaçtır?

- A) 11 B) 9 C) 8 D) 7 E) 6

4.

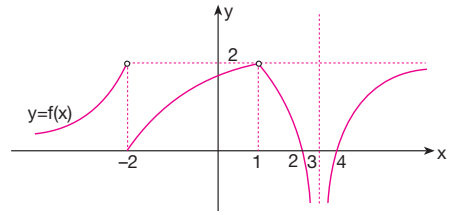


Şekilde f fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre, $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2} f(x) + \lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ toplamı kaçtır?

- A) 0 B) 1 C) 2 D) 4 E) 5

5.



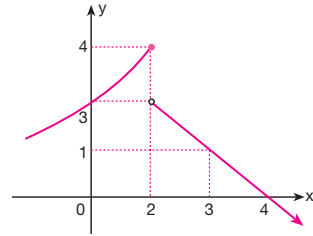
Yukarıdaki şekilde $f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre, aşağıdakilerden kaç tanesi yanlıştır?

- I. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ II. $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 0$ III. $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 2$
 IV. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 2$ V. $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 0$

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

6.



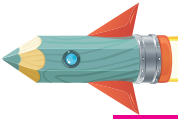
Şekilde f fonksiyonu $x > 2$ için doğrusal bir fonksiyondur.

Buna göre aşağıdaki ifadelerin kaç tanesi doğrudur?

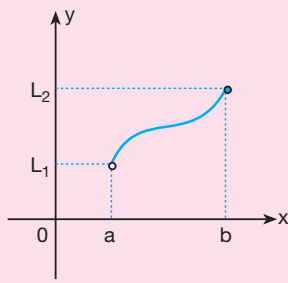
- I. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$
 II. $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 3$
 III. $\lim_{x \rightarrow 2} (f \circ f)(x) = 3$
 IV. $\lim_{x \rightarrow 2^+} (f \circ f \circ f)(x) = 0$
 V. $\lim_{x \rightarrow 2^-} (f \circ f \circ f \circ f)(x) = 4$

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

1	2	3	4	5	6
E	D	D	D	A	A



FONKSİYONUN UÇ NOKTALARINDA LİMİT



Yandaki şekilde f fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre, a ve b noktalarındaki limitlerini (varsa) bulalım.

f fonksiyonu $(a, b]$ aralığından $(L_1, L_2]$ aralığına tanımlı olduğu için, uç noktalardaki limit araştırılırken sadece tanımlı olduğu tarafın limitine bakılır.

Fonksiyonun bir noktada limitinin olması için, o noktada tanımlı olması zorunlu değildir. Buna göre,

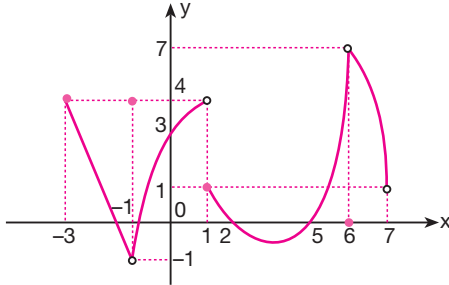
$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L_1$$

(a noktasındaki limit sadece sağdan limitle belirlenir.)

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow b^+} f(x) = L_2$$

(b noktasındaki limit, sadece soldan limitle belirlenir.)

KAVRAMA ÖRNEĞİ



Şekilde f fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

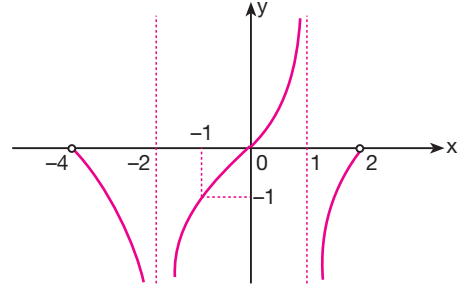
Buna göre x in $[-3, 7)$ aralığındaki kaç tam sayı değeri için limiti vardır?

Çözüm:

- $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = 4$ ($x = -3$ te limit vardır.)
- $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -1$ ($x = -1$ de limit vardır.)
- $\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 4 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1 \end{array} \right\} 4 \neq 1$ ($x = 1$ de limit yoktur.)
- $\lim_{x \rightarrow 6^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 6^+} f(x) = 7$ ($x = 6$ da limit vardır.)

O hâlde $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ değerlerinden $x = 1$ dışındaki 9 tanesinde limit vardır.

KAVRAMA ÖRNEĞİ



Şekilde $(-4, 2)$ aralığında f fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre, $(-4, 2)$ aralığındaki kaç tam sayıda limit bir gerçel sayıdır?

Çözüm:

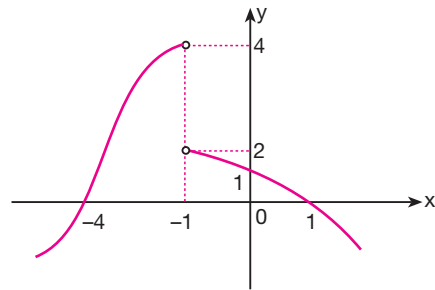
$(-4, 2)$ aralığındaki tüm tam sayılar $\{-3, -2, -1, 0, 1\}$ dir.

$x = 1$ de sağ ve sol limit eşit değildir. O hâlde limit yoktur.

$x = -2$ için limit vardır. $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -\infty$ fakat gerçel sayı değildir.

O hâlde, $\{-3, -1, 0\}$ değerlerinde limit bir gerçel sayıdır.

KAVRAMA ÖRNEĞİ



Şekilde f fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

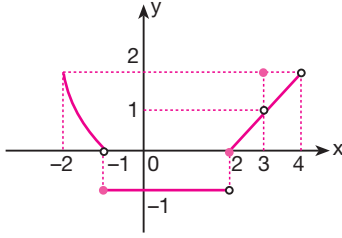
$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{f(x+1) + f(x-2)}{f(x+2)}$ limitinin değeri kaçtır?

Çözüm:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{f(x+1) + f(x-2)}{f(x+2)} &= \frac{f(-1^+) + f(-4^+)}{f(0^+)} \\ &= \frac{2+0}{1} = 2 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

KAVRAMA TESTİ

1.

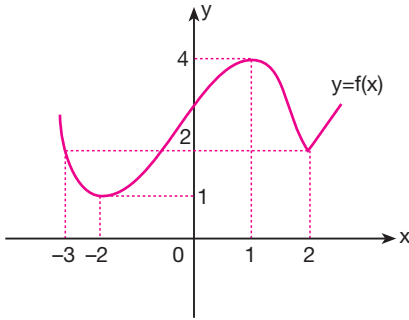


Şekildeki fonksiyon $[-2, 4)$ aralığında tanımlı olduğuna göre, aşağıdakilerden kaç tanesi yanlıştır?

- I. $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = 0$ II. $(f \circ f)(3) = 0$
 III. $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = -2$ IV. $(f \circ f)(-1) = 0$
 V. $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 1$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

2.



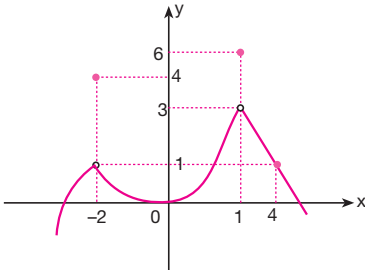
Yukarıda f fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

$$g(x) = \frac{f(x) + 1}{f(x + 1) - 1}$$

olduğuna göre, $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$ ifadesinin değeri kaçtır?

A) 5 B) 4 C) 0 D) -1 E) -2

3.

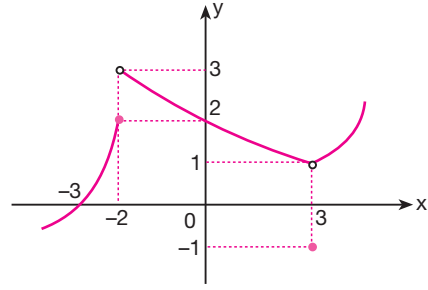


Şekildeki f fonksiyonu $x > 1$ için doğrusaldır.

$f[\lim_{x \rightarrow -2} f(x)] = a$ olduğuna göre, a kaçtır?

A) 6 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

4.



Yukarıda f bağıntısının grafiği verilmiştir.

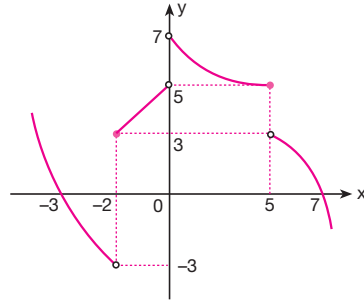
Buna göre;

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(-x)}{f(x+1)} + \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x-3)}{f(x-1)}$$

limitinin sonucu kaçtır?

A) $\frac{1}{2}$ B) 2 C) $\frac{5}{2}$ D) 3 E) 4

5.

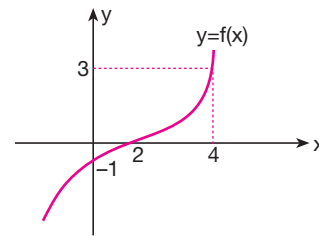


Şekilde f fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre, $\lim_{x \rightarrow -2^-} (f \circ f \circ f)(x)$ limitinin değeri kaçtır?

A) 0 B) 1 C) 3 D) 5 E) 7

6.

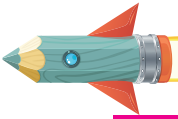


Yanda f fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre, $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{(f \circ f)(x-2)}{x \cdot f(x)}$ limitinin sonucu kaçtır?

A) $-\frac{1}{4}$ B) $-\frac{1}{12}$ C) $\frac{1}{4}$ D) 2 E) 4

1	2	3	4	5	6
B	A	A	D	D	B



LİMİT ÖZELLİKLERİ - 1

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L_1$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L_2$ olsun

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L_1 \pm L_2$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L_1 \cdot L_2$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} = \frac{L_1}{L_2} (L_2 \neq 0)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} a = a$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [af(x)] = a \cdot L_1$$



UYARI

- Gerçek (reel) sayılarda polinom olarak verilmiş bir fonksiyonun limiti hesaplanırken kritik nokta olmadığından sağdan ve soldan limite bakmaya gerek yoktur. Fonksiyonun kritik olmayan $x = x_0$ noktalarındaki limiti, bu noktalarda x_0 değeri yerine yazılarak bulunur.
- Bir fonksiyonun kritik noktalarında limit soruluyorsa bu noktalarda sağdan ve soldan limite bakılır.

KAVRAMA ÖRNEĞİ

$\lim_{x \rightarrow 2} (x^3 + 2x^2 - 3)$ limitinin değeri kaçtır?

Çözüm:

Polinom fonksiyonlarda limit değeri x yerine yazılarak bulunur.

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^3 + 2x^2 - 3) = 2^3 + 2 \cdot 2^2 - 3 = 8 + 8 - 3 = 13$$

KAVRAMA ÖRNEĞİ

$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} + 2x}{x^2 + \sqrt{x}}$ limitinin değeri kaçtır?

Çözüm:

$x = 4$ kritik nokta olmadığı için direkt yerine yazılır.

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} + 2x}{x^2 + \sqrt{x}} = \frac{\sqrt{4} + 2 \cdot 4}{4^2 + \sqrt{4}} = \frac{2 + 8}{16 + 2} = \frac{10}{18} = \frac{5}{9}$$

KAVRAMA ÖRNEĞİ

$\lim_{x \rightarrow -3^+} (x^2 + 3x - 4)$ limitinin değeri kaçtır?

Çözüm:

$x = -3$ kritik nokta olmadığı için direkt yerine yazılır.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) &= (-3)^2 + 3(-3) - 4 \\ &= 9 - 9 - 4 \\ &= -4 \end{aligned}$$

KAVRAMA ÖRNEĞİ

$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 2$ ve $\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = -4$

olduğuna göre, aşağıdakilerden kaç tanesi doğrudur?

I. $\lim_{x \rightarrow 3} [f(x) - g(x)] = -4$ II. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2f(x)}{4 - g(x)} = \frac{4}{5}$

III. $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{8f(x)} = 4$ IV. $\lim_{x \rightarrow 3} [f^2(x) - 2g(x)] = 8$

V. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f^3(x)}{g^2(x)} = \frac{3}{8}$

Çözüm:

I. $\lim_{x \rightarrow 3} [f(x) - g(x)] = 2 - (-4) = 6$ (Yanlış)

II. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2f(x)}{4 - g(x)} = \frac{2 \cdot 2}{4 - (-4)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ (Yanlış)

III. $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{8 \cdot f(x)} = \sqrt{8 \cdot 2} = \sqrt{16} = 4$ (Doğru)

IV. $\lim_{x \rightarrow 3} [f^2(x) - 2g(x)] = 4 + 8 = 12$ (Yanlış)

V. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f^3(x)}{g^2(x)} = \frac{2^3}{(-4)^2} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$ (Yanlış)

O hâlde, 1 tanesi doğrudur.

KAVRAMA ÖRNEĞİ

$\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 2$, $\lim_{x \rightarrow 5} g(x) = -3$

olduğuna göre, $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x - 4 - f(x) \cdot g(x)}{2g(x) - x + f(x)}$ limitinin değeri kaçtır?

Çözüm:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x - 4 - f(x)g(x)}{2g(x) - x + f(x)} &= \frac{2 \cdot 5 - 4 - f(5)g(5)}{2g(5) - 5 + f(5)} \\ &= \frac{10 - 4 - 2 \cdot (-3)}{2(-3) - 5 + 2} \\ &= \frac{6 + 6}{-6 - 5 + 2} \\ &= \frac{12}{-9} = -\frac{4}{3} \end{aligned}$$

KAVRAMA TESTİ

4

1. $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,4)} (x^2 - 2xy + y^3)$

limitinin değeri kaçtır?

- A) 48 B) 50 C) 52 D) 60 E) 64

2. $\lim_{\left(\frac{a}{b}\right) \rightarrow 4} \frac{3a - 4b}{2a + 3b}$

limitinin değeri kaçtır?

- A) $\frac{3}{7}$ B) $\frac{4}{7}$ C) $\frac{7}{11}$ D) $\frac{8}{11}$ E) $\frac{9}{13}$

3. $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 7$ olmak üzere,

$$A = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$$

olduğuna göre, A kaçtır?

- A) 49 B) 20 C) 14 D) 7 E) 0

4. $f(x) = \frac{3x - 1}{2x + 6}$

olduğuna göre, $\lim_{x \rightarrow -1} f^{-1}(x)$ kaçtır?

- A) -1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

5. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 2$ ve $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -1$ olduğuna göre,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - 2g(x) + f(x) \cdot g(x)}{f(x) + g(x)}$$

limitinin değeri kaçtır?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

6. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x + 3 + f(x - 1)}{x + 3} = 4$

olduğuna göre, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ limitinin değeri kaçtır?

- A) 9 B) 12 C) 15 D) 18 E) 21

7. $f(x) = x^4 - x^3 + (m - 1)x + 4$ fonksiyonu veriliyor.

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 6$$
 olduğuna göre, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ limitinin değeri kaçtır?

- A) 12 B) 10 C) 8 D) 6 E) 4

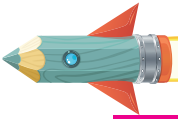
8. $f: \mathbb{R} - \{4\} \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 12}{2x - 8}$$
 fonksiyonu veriliyor.

Buna göre $\lim_{x \rightarrow 5} [f(x) - 4]$ ifadesinin değeri kaçtır?

- A) $\frac{11}{2}$ B) $\frac{9}{2}$ C) $\frac{7}{2}$ D) $\frac{5}{2}$ E) $\frac{3}{2}$

1	2	3	4	5	6	7	8
C	D	C	A	B	C	A	E



LİMİT ÖZELLİKLERİ - 2

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L_1$ olsun.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} 2n+1 \sqrt[n]{f(x)} = 2n+1 \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)} = 2n+1 \sqrt[n]{L_1}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} 2n \sqrt[n]{f(x)} = 2n \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)} = 2n \sqrt[n]{L_1}$$

($f(x) \geq 0$ ve $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq 0$ ise)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = \left| \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right| = |L_1|$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [\log f(x)] = \log \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right) \cdot (f(x) > 0 \text{ ise})$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} c^{f(x)} = c^{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)} \quad (c \in \mathbb{R})$$

KAVRAMA ÖRNEĞİ

$\lim_{x \rightarrow 2} [f(x) + 2x - 1] = 8$ olduğuna göre,

$\lim_{x \rightarrow 7} [f(x - 5) - x + 4]$ limitinin değeri kaçtır?

Çözüm:

$$\lim_{x \rightarrow 2} [f(x) + 2x - 1] = 8$$

$$f(2) + 4 - 1 = 8$$

$$f(2) = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 7} [f(x - 5) - x + 4] = f(2) - 7 + 4$$

$$= f(2) - 3$$

$$= 5 - 3$$

$$= 2 \text{ bulunur.}$$

KAVRAMA ÖRNEĞİ

$f(x)$ bir çift fonksiyon olmak üzere;

$\lim_{x \rightarrow 4} [f(x) - 3] = 6$ olduğuna göre,

$\lim_{x \rightarrow 4} [2x - 4 - f(-x)]$ limitinin değeri kaçtır?

Çözüm:

$f(x)$ bir çift fonksiyon ise $f(-x) = f(x)$ tir.

$$\lim_{x \rightarrow 4} [f(x) - 3] = 6$$

$$f(4) - 3 = 6 \Rightarrow f(4) = 9$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} [2x - 4 - f(-x)]$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} [2x - 4 - f(x)] \quad (f(x) \text{ çift fonksiyon olduğu için})$$

$$= 8 - 4 - f(4)$$

$$= 4 - 9$$

$$= -5$$

KAVRAMA ÖRNEĞİ

$f(x) = x^{2014} - 2x^{2013} + 4$ olduğuna göre,

$\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt[n]{f(x)}$ limitinin değeri kaçtır?

Çözüm:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt[n]{f(x)} &= \sqrt[n]{f(2)} \\ &= \sqrt[n]{2^{2014} - 2 \cdot 2^{2013} + 4} \\ &= \sqrt[4]{4} \\ &= 2 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

KAVRAMA ÖRNEĞİ

$$f(z) = \lim_{y \rightarrow z} \left[\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{y^x - x^y}{x^3 + 2y} \right) \right]$$

olduğuna göre, $\lim_{z \rightarrow 3} f(z)$ limitinin değeri kaçtır?

Çözüm:

$$f(z) = \lim_{y \rightarrow z} \left[\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{y^x - x^y}{x^3 + 2y} \right) \right]$$

$$f(z) = \lim_{y \rightarrow z} \left(\frac{y^2 - 2^y}{8 + 2y} \right)$$

$$f(z) = \frac{z^2 - 2^z}{8 + 2z} \Rightarrow$$

$$\lim_{z \rightarrow 3} f(z) = \lim_{z \rightarrow 3} \frac{z^2 - 2^z}{8 + 2z} = \frac{9 - 8}{8 + 6} = \frac{1}{14}$$

KAVRAMA ÖRNEĞİ

$$\lim_{x \rightarrow 6} [\log_8(5x + 2) - \log_4(x - 4)]$$

limitinin değeri kaçtır?

Çözüm:

$$\lim_{x \rightarrow 6} [\log_8(5x + 2) - \log_4(x - 4)]$$

$$= \log_8(5 \cdot 6 + 2) - \log_4(6 - 4)$$

$$= \log_8 32 - \log_4 2$$

$$= \log_2 32^{\frac{1}{3}} - \log_2 2$$

$$= \frac{5}{3} - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{7}{6} \text{ bulunur.}$$

KAVRAMA TESTİ

1. $\lim_{x \rightarrow 2} (\log_2 \sqrt{3x^3 - 8} - \log_2 \sqrt{27x^3 + 6x^2 + 16})$

limitinin değeri kaçtır?

- A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

2. $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{\frac{5x^2 - 1}{x^2 + 2x + 22}}$

limitinin sonucu kaçtır?

- A) $\frac{4}{5}$ B) $\frac{3}{2}$ C) $\frac{2}{5}$ D) $\frac{7}{4}$ E) $\frac{2}{3}$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\sin\left(\frac{3\pi}{2}(x+1)\right) + 2 \cdot e^{-x} \right]$

limitinin sonucu kaçtır?

- A) -3 B) -2 C) -1 D) 1 E) 3

4. $\lim_{a \rightarrow 2} \frac{a^3 - ab + 4}{a^2 - 3} = 6$

olduğuna göre, b kaçtır?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

5. $\lim_{x \rightarrow -1} (2x^3 + 5x^2 + x + 5)$

limitinin değeri kaçtır?

- A) 5 B) 7 C) 10 D) 12 E) 16

6. $\lim_{x \rightarrow -1} \sqrt[3]{\frac{3x^2 + 2x - 2}{x^3 - 7}}$

limitinin değeri kaçtır?

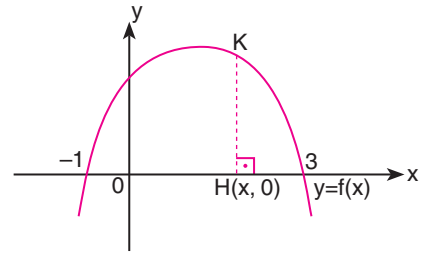
- A) $\frac{1}{2}$ B) 0 C) $-\frac{1}{2}$ D) $-\frac{2}{3}$ E) $\frac{3}{2}$

7. $\lim_{x \rightarrow -1} \left(\pi^{\frac{3x+3}{x-1}} - 2^{x^2+2x-1} \right)$

ifadesinin değeri kaçtır?

- A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{4}{5}$ E) $\frac{5}{6}$

8.

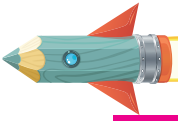


Yukarıda $y=f(x)$ parabolü üzerinde alınan bir K noktasının x-ekseni üzerindeki dik iz düşümü $H(x, 0)$ noktasıdır.

Buna göre $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|KH|}{|OH|} = 8$ olduğuna göre $f(-2)$ kaçtır?

- A) -10 B) -8 C) -6 D) -4 E) -2

1	2	3	4	5	6	7	8
A	C	D	C	B	A	C	A



PARÇALI FONKSİYONUN LİMİTİ

Parçalı fonksiyonun alt aralıklarının sınır değerleri kritik noktaldır. Bu noktalarda limit bulunurken sağdan ve soldan limite bakılır. Diğer noktalarda ise x değeri yerine konulup limit bulunur.

KAVRAMA ÖRNEĞİ

f: $\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+2} & , x < 2 \\ x+1 & , 2 \leq x < 5 \\ \sqrt{x^2+11} & , 5 \leq x \end{cases}$$

fonksiyonunun $x = -2$, $x = 2$ ve $x = 5$ noktalarındaki limitlerini araştıralım.

Çözüm:

⚠ $x = -2$ kritik nokta olmadığından,

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \sqrt{x+2} = \sqrt{-2+2} = 0 \text{ bulunur.}$$

⚠ $x = 2$ kritik nokta olduğundan, sağ ve sol limite bakılır.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \sqrt{x+2} = \sqrt{2+2} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x+1) = 2+1 = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$$

O hâlde

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \text{YOKTUR}$$

⚠ $x = 5$ kritik nokta olduğundan, sağ ve sol limite bakılır.

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^-} (x+1) = 5+1 = 6 \text{ dır.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^+} \sqrt{x^2+11} = \sqrt{5^2+11} = 6 \text{ dır.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) \text{ olduğundan,}$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 6 \text{ bulunur.}$$

KAVRAMA ÖRNEĞİ

$$f(x) = \begin{cases} 5x-12 & , x > 2 \\ \frac{x}{x-3} & , x < 2 \end{cases}$$

fonksiyonu için $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ kaçtır?

Çözüm:

$x = 2$ kritik nokta olduğundan,

$x \rightarrow 2$ için sağdan ve soldan limite bakılır.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{x}{x-3} \right) = \frac{2}{2-3} = -2 \text{ dir.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (5x-12) = 5 \cdot 2 - 12 = -2 \text{ dir.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -2 \text{ olduğundan,}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -2 \text{ dir.}$$

KAVRAMA ÖRNEĞİ

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & , x < 3 \\ -1 & , x = 3 \\ x^2-2x & , x > 3 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $f(x)$ fonksiyonu için

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) \text{ toplamı kaçtır?}$$

Çözüm:

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} (x^2-2x) = 3^2-2 \cdot 3 = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} (x+2) = 5$$

$$\text{O hâlde } \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 3+5 = 8 \text{ bulunur.}$$

KAVRAMA ÖRNEĞİ

$$f(x) = \begin{cases} 2x-1 & , x > 2 \\ x^2+2 & , -2 \leq x \leq 2 \\ -x-5 & , x < -2 \end{cases}$$

fonksiyonu verildiğine göre,

$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) + \lim_{x \rightarrow -1} f(x) + \lim_{x \rightarrow -3} f(x) \text{ ifadesinin değeri kaçtır?}$$

Çözüm:

$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4} (2x-1) = 7$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} (x^2+2) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3} (-x-5) = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) + \lim_{x \rightarrow -1} f(x) + \lim_{x \rightarrow -3} f(x) = 7+3-2 = 8$$